Примакова И.Н., учитель математики МБОУ "Лицей" г.Протвино

Зависимость температуры воды от времени при остывании. Цифровая лаборатория по математики.

Цифровая лаборатория по математике предназначена для демонстрации того, что изучаемые в курсе школьной математики функции не являются абсолютно абстрактными, а возникают (и возникали в истории математики и физики) для описания реальных процессов.

Учащиеся, работая с данной цифровой лабораторией, интегрируют знания, получаемые на уроках математики при анализе графиков функций.

Введенные в состав лаборатории исследования обеспечены помимо датчиков минимальным набором оснастки для реализации экспериментов. Разные работы могут быть привязаны как к курсу математики разных классов при изучении графиков соответствующих функций (линейная, гиперболическая, параболическая, синусоидальная, показательная), так и к курсу физики при изучении разделов, связанных с механикой, тепловыми и электрическими явлениями, ядерной физикой.

В исследовании и дальнейшей работе использовались приборы, необходимые для эксперимента «Зависимость температуры воды при ее остывании в капле»: датчик температуры, USB-кабель, стакан с теплой водой, компьютер с программой «ЦЛ по математике».

Теоретические данные, необходимые для дальнейшей работы, опираются на понятие производной.

Производная — основное понятие дифференциального исчисления, характеризующее ***скорость изменения функции.*** Определяется как предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если таковой предел существует.

Таким образом, $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$

Задача о мгновенной скорости. Механический смысл производной

Напомним, как определялась скорость движения. Материальная точка движется по координатной прямой. Координата х этой точки есть известная функция $x(t)$ времени t. За промежуток времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ перемещение точки равно

$x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)$,а её средняя скорость такова:

$$v_{ср}(\Delta t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}.$$

Обычно характер движения бывает таковым, что при малых Δt средняя скорость практически не меняется, т.е. движение с большой степенью точности можно считать равномерным. Другими словами, значение средней скорости при $\Delta t \to 0$ стремится к некоторому вполне определённому значению, которое называют мгновенной скоростью $v(t_0)$ материальной точки в момент времени t_0.

Итак, $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t} = x'(t_0)$.

Но по определению $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

Поэтому считают, что мгновенная скорость в момент времени t_0 $v(t_0) = x'(t_0)$.

Таким образом, производная координаты по времени есть скорость. В этом состоит механический смысл производной.

Аналогично рассуждая, получаем, что производная от скорости по времени есть ускорение, т.е. $a(t) = v'(t)$.

Задача о теплоемкости тела

Чтобы температура тела массой в 1 г повысилась от 0 градусов до t градусов, телу необходимо сообщить определенное количество тепла Q. Значит, Q есть функция температуры t, до которой тело нагревается: Q = Q(t). Пусть температура тела повысилась с t_0 до t. Количество тепла, затраченное для этого нагревания, равно $Q(t) - Q(t_0)$ Отношение $\frac{Q(t) - Q(t_0)}{\Delta t}$ есть количество тепла, которое необходимо в среднем для нагревания тела на 1 градус при изменении температуры на Δt градусов. Это отношение называется средней теплоёмкостью данного тела и обозначается $c_{ср}$.
Т.к. средняя теплоёмкость не дает представления о теплоёмкости для любого значения температуры Т, то вводится понятие теплоёмкости при данной температуре t_0 (в данной точке t_0).
Теплоемкостью при температуре t_0 (в данной точке) называется предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)}{\Delta t} = Q'(t_0) = c(t_0)$$

Таким образом, производная от количества тепла, получаемого телом, по температуре есть теплоемкость.

В таблице представлены формулы, показывающие зависимость физических функций от времени:

Применение производной в физике.		
	Формула	**Вывод**
m(t) – зависимость массы расходуемого горючего от времени.	$m'(t) = v(t)$	**Производная** *массы по времени* есть *<u>скорость</u> расхода горючего.*
T(t) – зависимость температуры нагреваемого тела от времени.	$T'(t) = v(t)$	**Производная** *температуры по времени* есть *<u>скорость</u> нагрева тела.*
m(t) – зависимость массы при распаде радиоактивного вещества от времени.	$m'(t) = u(t)$	**Производная** *массы радиоактивного вещества по времени* есть *<u>скорость</u> радиоактивного распада.*
q(t) – зависимость количества электричества, протекающего через проводник, от времени	$q'(t) = I(t)$	**Производная** *количества электричества по времени* есть *сила тока*.
A(t) – зависимость работы от времени	$A'(t) = N(t)$	**Производная** *работы по времени* есть *мощность*.

Экспоненциальное уравнение зависимости температуры от времени:

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$$

Здесь независимая переменная t - время, $T(t)$ и T финальная температура, k коэффициент передачи тепла, T_0 начальная температура тела и T_a неизменяемая температура окружающей среды.

найдём производную $T'(t)$ продифференцировав полученное уравнения относительно времени:

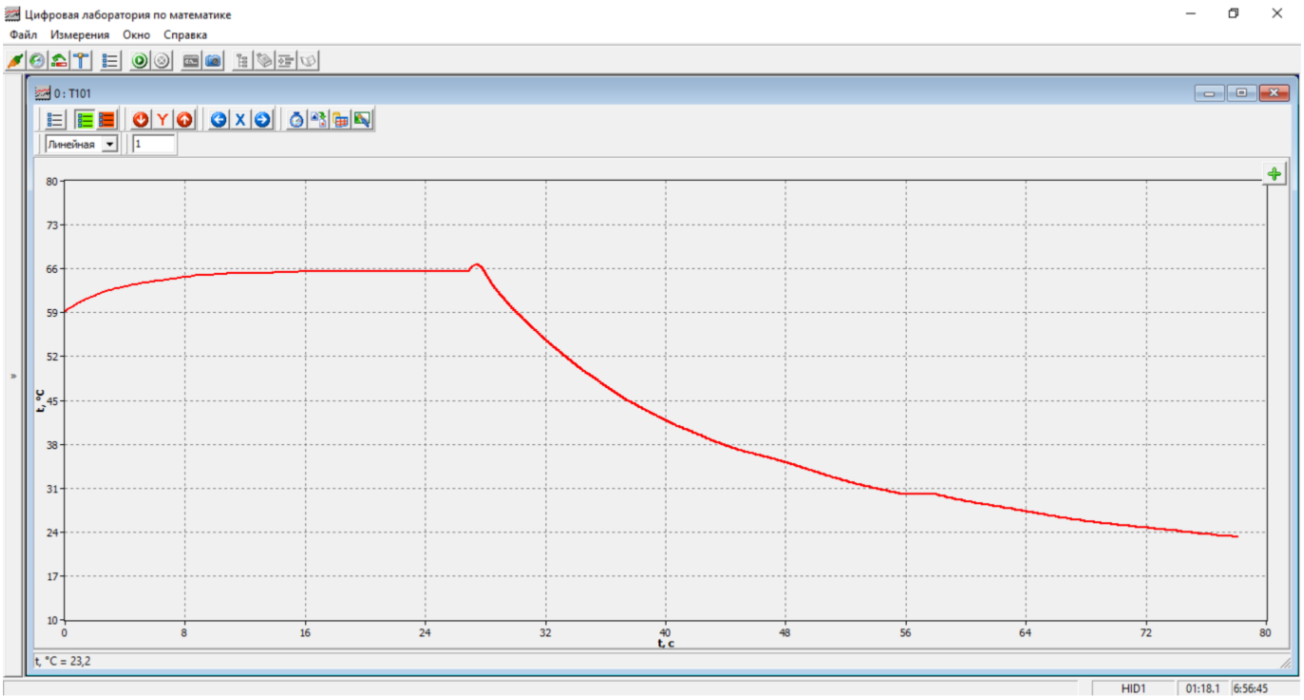
$$T'(t) = -k(T_0 - T_a)e^{-kt}$$

Соответствие экспериментальных точек зависимости температуры T(t) от времени соответствует модели, в которой скорость теплопередачи от воды к воздуху пропорциональна перепаду температур на границе воздух-вода.

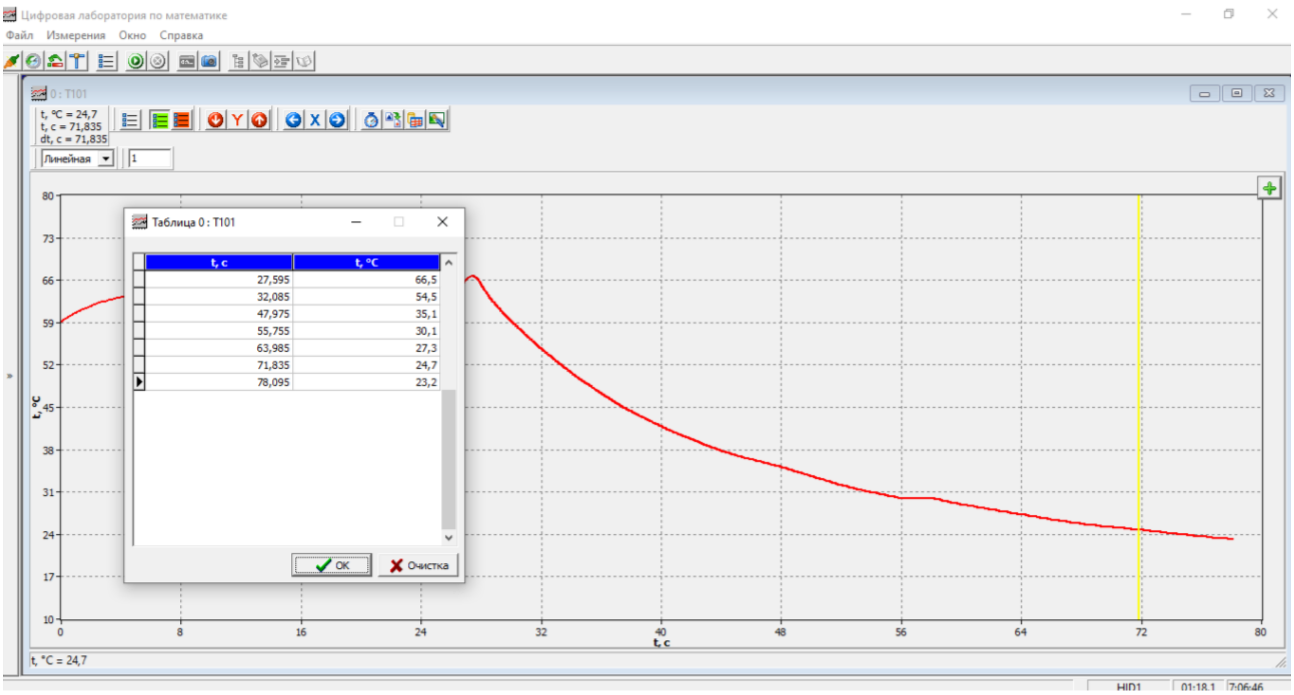
В такой модели остальные стадии теплопередачи (из глубины капли на поверхность, унос энергии от слоев воздуха вблизи поверхности капли в пространство комнаты) осуществляется существенно быстрее.

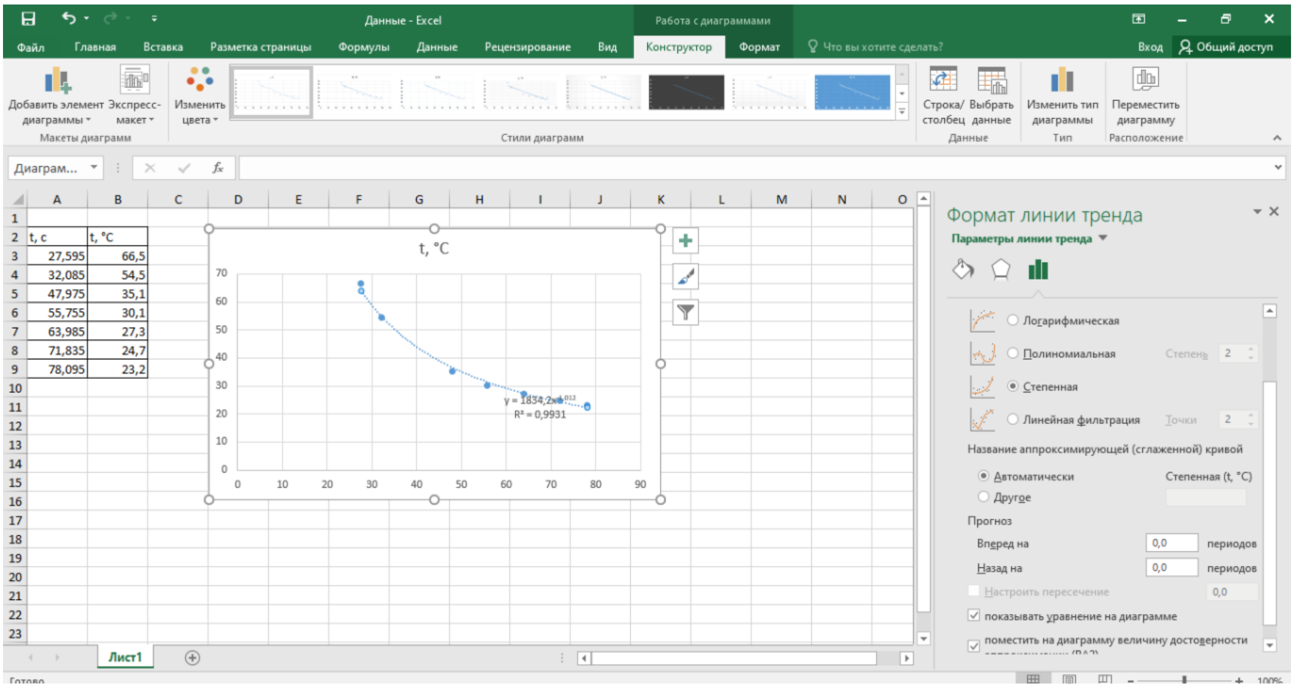
График зависимости температуры воды от времени при остывании

Ось абсцисс показывает изменение времени, а ось ординат – изменение температуры.



Необходимо установить начальное значение температуры, когда вода начинает остывать, и зафиксировать его. Построим таблицу контрольных точек, по которым в дальнейшем будем строить график.





Полученное уравнение y(t) = $1834{,}2x^{-1{,}012}$ Величина достоверности аппроксимации $R^2 = 0{,}9931$ (график построен абсолютно точно при $R^2 = 1$)

Найдем производную полученной функции:

$y'(t) = (1834{,}2x^{-1{,}012})' = -1856{,}2104\, x^{-2{,}012}$

Данное уравнение показывает скорость изменения температуры от времени.

Кривую остывания можно также описать экспоненциальной функцией $y=Ae^{-Bx}$.

Значение производной $y'(t)<0$. График исходной функции убывает. Наблюдается процесс остывания.

<u>Вывод:</u>

Зависимость температуры воды от времени при ее остывании в капле была установлена опытным путем, используя датчик измерения температуры. Работа с производной функции показывает скорость изменения температуры от времени. Программа Excel позволяет получить и обработать данные эксперимента, уравнение для дальнейшей работы, построить график. В ходе математической обработки показывается, что зависимость описывается графиком степенной функции.

С помощью датчиков «Цифровой лаборатории по математике» можно наблюдать и получать измерения физических величин, экспортировать данные в редакторы таблиц (MS Excel и OpenOffice). Сами работы можно проводить в рамках базовой или профильной цифровой лаборатории.

Учащиеся экспериментальным путем наблюдают применение теоретических знаний на практике.

Использованные литература и ссылки:

https://nau-ra.ru/

https://urok.1sept.ru/articles/594799

Поваляев О. А., Ханнанов Н. К., Хоменко С. В.- Цифровая лаборатория по математике. Методическое пособие для учителе/ О. А. Поваляев, Н. К. Ханнанов, С. В. Хоменко.- М.: издательство «Ювента», 2016.- 68 с.: ил.